第９講　総合問題(1)

1　以下の設問に答えよ．

(1)　正の実数 a，b に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b}$$

(2)　正の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標空間内の三角柱

$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 2$

を考え, その xy 平面内の面を S, zx 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に, 点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(2,\ 2,\ 2)$ とする．ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め．その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．ただし, 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 サイコロを振って1または2の目が出れば5点，3または4の目が出れば3点，5または6の目が出れば0点を獲得するとする．サイコロを10回振り，獲得する得点の合計が n 点となる確率を $p(n)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $p(13)$ の値を求めよ．

(2) $p(7)=0$ となることを証明せよ．

(3) $p(20)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1 以下の設問に答えよ．

(1) 正の実数 a，b に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b}$$

(2) 正の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

(1) $a,\ b>0$ より

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqq2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$$

$\left(\text{等号成立は } \frac{b}{a}=\frac{a}{b} \text{　つまり　} a=b \text{ のとき}\right)$

よって　$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geqq4$　より　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b}$

(2) $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\geqq n^2$　……(※)　について

［Ⅰ］ $n=1$ のとき　(左辺)$=\frac{1}{x_1}\cdot x_1=1$，(右辺)$=1^2=1$　より(※)は成り立つ．

［Ⅱ］ $n=k$ のとき　(※)すなわち　$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\geqq k^2$　が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)&=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{k+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i+x_{k+1}\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)+x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}x_i+1\\&\geqq k^2+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_{k+1}}{x_i}+\frac{x_i}{x_{k+1}}\right)+1\\&\geqq k^2+\sum_{i=1}^{k}2\sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_i}\cdot\frac{x_i}{x_{k+1}}}+1=k^2+2k+1=(k+1)^2\end{aligned}$$

等号成立は $x_i=x_{k+1}$　つまり　$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_{k+1}$ のとき

よって　$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より，すべての自然数 n で(※)は成り立つ．

ゆえに　$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標空間内の三角柱

$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 2$

を考え，その xy 平面内の面を S，zx 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(2,\ 2,\ 2)$ とする．ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする．

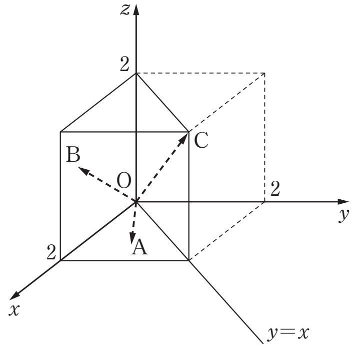
(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め．その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2(1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは $(b,\ -a,\ a-b)$ である．

これを $\vec{n}$ とすると，求める単位ベクトルは



$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}(b,\ -a,\ a-b)$$

$$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{|bc+(a-b)d|}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}=\frac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$$

(2) 底面を $\triangle\mathrm{OAC}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると，

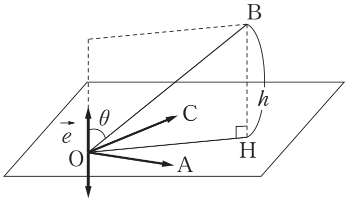
高さは　$h=||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta|=||\vec{e}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta|=|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)\times(2\sqrt{3})^2-\{2(a+b)\}^2}=2\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}\times\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$$=\frac{2\{bc+(a-b)d\}}{3}$$



(3) $0 \leqq b \leqq a \leqq 2,\ 0 \leqq c \leqq 2,\ 0 \leqq d \leqq 2$

(i) $a=b$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}bc \leqq \dfrac{2}{3}\cdot2\cdot2=\dfrac{8}{3}$　等号成立は　$a=b=c=2$ のとき　(d は任意)

(ii) $a>b$ のとき

$b=0$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}ad \leqq \dfrac{2}{3}\cdot2\cdot2=\dfrac{8}{3}$

等号成立は　$a=d=2,\ b=0$ のとき　(c は任意)

$b \neq 0$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}\{bc+(a-b)d\} \leqq \dfrac{2}{3}\{b\cdot2+(a-b)\cdot2\}=\dfrac{4}{3}a \leqq \dfrac{4}{3}\cdot2=\dfrac{8}{3}$

等号成立は　$a=c=d=2$ のとき　(b は任意)

以上より，最大値 $\dfrac{8}{3}$　これをとる座標は $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0,\ d)$　$(0 \leqq d \leqq 2)$

または　$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 2)$　$(0 \leqq c \leqq 2)$

または　$\mathrm{A}(2,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0,\ 2)$　$(0<b<2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 サイコロを振って1または2の目が出れば5点，3または4の目が出れば3点，5または6の目が出れば0点を獲得するとする．サイコロを10回振り，獲得する得点の合計が n 点となる確率を $p(n)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $p(13)$ の値を求めよ．

(2) $p(7)=0$ となることを証明せよ．

(3) $p(20)$ の値を求めよ．

(1) 得点が13点になるときを考える．

1，2が出た回数を a，3，4が出た回数を b とすると

$$5a+3b=13$$

$a=0$ のとき　b は整数解なし　　　$a=1$ のとき　b は整数解なし

$a=2$ のとき　$b=1$　　　$a \geqq 3$ のとき　b は正の解なし

したがって　$a=2$，$b=1$

よって　$p(13)=\dfrac{10!}{2!1!7!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^7=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{1}{3^{10}}=\boldsymbol{\dfrac{40}{6561}}$

(2) (1)同様　$5a+3b=7$

$b=0$ のとき　a は整数解なし　　　$b=1$ のとき　a は整数解なし

$b=2$ のとき　a は整数解なし

よって，得点が7点になることはないので　$p(7)=0$

(3) $5a+3b=20$　　これを満たすのは　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (4,\ 0)$

$$p(20)=\frac{10!}{1!5!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{10!}{4!6!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=\left(\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)\cdot\frac{1}{3^{10}}=\boldsymbol{\frac{490}{19683}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　空間ベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ 3,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 6,\ 2)$　がある．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

(2)　四面体 OPQR の体積 V を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に 0 から 9 までの数字を 1 つずつ書いたカードが 10 枚入っている．袋からカード 1 枚を無作為に取り出して数字を確認したのち，袋にもどす試行を考える．

(1)　この試行を 2 回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2 とおくとき，等式 $X_1+X_2=X_1X_2$ が成り立つ確率を求めよ．

(2)　この試行を 3 回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2，X_3 とおくとき，等式 $X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$ が成り立つ確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 空間ベクトル　$\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{OQ}=(2,\ 3,\ 6)$，$\overrightarrow{OR}=(3,\ 6,\ 2)$　がある．このとき次の問いに答えよ．

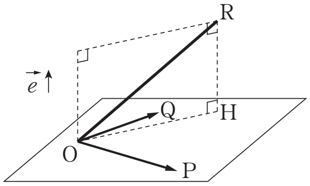
(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

(2) 四面体OPQRの体積 V を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 2)$ と $\overrightarrow{OQ}=(2,\ 3,\ 6)$ の両方に垂直なベクトルの1つとして
$\vec{n}=(0,\ -8,\ 4)=4(0,\ -2,\ 1)$　が挙げられる．

よって，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\pm\frac{1}{\sqrt{4+1}}(0,\ -2,\ 1)=\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\mathbf{(0,\ -2,\ 1)}$$



(2) 点Rから平面OPQに下ろした垂線の足をHとすると

$$\mathrm{RH}=|\overrightarrow{OR}\cdot\vec{e}|=\left|3\times0+6\times\frac{-2}{\sqrt{5}}+2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right|=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

また，$|\overrightarrow{OP}|^2=4+1+4=9$，$|\overrightarrow{OQ}|^2=4+9+36=49$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4+3+12=19$ より

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times49-19^2}=2\sqrt{5}$$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}$

正射影ベクトルを用いた解答である．
(1)がなければまったく別の典型的な解法に持ち込むことも可能だが，誘導に乗る形の解法ができることが望ましい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に0から9までの数字を1つずつ書いたカードが10枚入っている．袋からカード1枚を無作為に取り出して数字を確認したのち，袋にもどす試行を考える．

(1)　この試行を2回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2 とおくとき，等式 $X_1+X_2=X_1X_2$ が成り立つ確率を求めよ．

(2)　この試行を3回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2，X_3 とおくとき，等式 $X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$ が成り立つ確率を求めよ．

(1)　$X_1+X_2=X_1X_2$ より　$(X_1-1)(X_2-1)=1$

これを満たす整数の組は　$(X_1-1,\ X_2-1)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

よって　$(X_1,\ X_2)=(2,\ 2),\ (0,\ 0)$ の2通り．

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{2}{10^2}=\dfrac{1}{50}$

(2)　$X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$　……①

まずは　$X_1\leqq X_2\leqq X_3$　のときを考える．　絞り込み

①より　$X_1X_2X_3=X_1+X_2+X_3\leqq X_3+X_3+X_3=3X_3$　より　$X_1X_2\leqq 3$

$X_1=0$ のとき　①より　$X_2+X_3=0$　よって　$X_2=X_3=0$

$X_1\neq 0$ のとき　$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ のみ

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1)$ のとき　①より　$2+X_3=X_3$　　よって不適

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 2)$ のとき　①より　$3+X_3=2X_3$　　ゆえに　$X_3=3$

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 3)$ のとき　①より　$4+X_3=3X_3$　　$X_3=2$

よって　$X_1\leqq X_2\leqq X_3$ を満たさず不適

ゆえに　$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 2,\ 3)$

①は X_1，X_2，X_3 に関して対称より，求める確率は　$\dfrac{1+3!}{10^3}=\mathbf{\dfrac{7}{1000}}$

対称形でかつ大小関係が設定されていない場合は，自分で設定してあとで拡張すると解答を簡潔にまとめることが可能である．また整数問題は「絞り込み」が有効な手段となる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。